第 39 卷 第 5 期
2022 年 10 月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 39 No. 5
Oct. 2022

文章编号:1000-4939(2022)05-0895-06

机加工表面的分形维数与粗糙度之间的关联规律研究

宋晖,王雨,吴焱明,张彦,尹延国,陈奇

(合肥工业大学机械工程学院,230009 合肥)

摘　要:为了厘清机加工表面的分形维数和粗糙度参数之间的关联规律,选定 6 种不同加工方式、不同粗糙度的标准样块,通过测量其表面形貌,并利用结构函数法获得其分形维数。在与各表面的粗糙度参数对比研究后发现:对于车削和刨削的加工表面,其分数维数与表面粗糙度成反比关系;对于平面铣、端面铣、平面磨削和外圆磨削的加工表面,其分形维数与表面粗糙度大体成反比关系,但局部呈现非线性规律。因此,不能简单地将分形维数与表面粗糙度表达为固定的正比或反比关系,需要针对具体对象进行实际测定。本研究有利于丰富机加工表面的表征方法,提高表面的评估精度,具有一定的工程意义和应用价值。

关键词:机加工表面;分形维数;粗糙度参数;关联规律

中图分类号:TH117.1　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.05.010

The law of correlation between fractal dimension and roughness of machined surface

SONG Hui, WANG Yu, WU Yanming, ZHANG Yan, YIN Yanguo, CHEN Qi

(School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China)

Abstract: In order to clarify the relationship between the fractal dimension and roughness parameters of machined surface, six standard blocks with different machining methods and roughness are selected in this paper. The fractal dimension is obtained by measuring the surface morphology and employing the structure function method. It is found that the fractal dimension is inversely proportional to the surface roughness for the machined surface of lathe and planer, and inversely proportional to the surface roughness for the machined surface of flat milling, end milling, flat grinding and external grinding in terms of the overall trend, but their relationship is nonlinear in some part cases. Therefore, the relationship between fractal dimension and surface roughness cannot be simply expressed as a fixed proportional or inverse, and it needs to be determinate for specific objects. The present research can help enrich the characterization method for machined surface, improve the evaluation accuracy of surface, and has good engineering significance and application value.

Key words: machined surface; fractal dimension; roughness parameter; correlation law

收稿日期:2021-01-19　　**修回日期:**2022-07-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51775158;51775161);安徽省重点研究与开发资助项目(No. JZ2022AKKG0093)
通信作者:陈奇,教授。E-mail:seucq@163.com
引用格式:宋晖,王雨,吴焱明,等. 机加工表面的分形维数与粗糙度之间的关联规律研究[J]. 应用力学学报,2022,39(5):895-900.
SONG Hui, WANG Yu, WU Yanming, et al. The law of correlation between fractal dimension and roughness of machined surface[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(5): 895-900.

自从 Mandelbrot 教授在几何学上创造性地发现了地表形貌[1]的分形特征，分形理论给计算机、经济、生物、工程等许多科学领域都带来了极大的影响，特别是在摩擦学中应用广泛，并在分析机械系统的接触力学方面已被证明非常成功[2-3]。近年来，众多学者发现机加工表面具有分形特征[4-9]，因此分形维数作为分形特征的重要参数，可用于机加工表面的表征，也成为了除表面粗糙度（这里特指算术平均偏差，R_a）之外的另一参数。然而关于这2个表征参数之间关联规律的结论目前仍不统一。

有学者认为分形维数与表面粗糙度成反比。Zhang 等[10]研究了分形维数与表面粗糙度之间的关系，认为分形维数与表面粗糙度呈负指数关系。Zhu 等[11]对磨损表面形貌的特征进行了试验探索，发现分形维数随着表面粗糙度的增加而减小。Jiang 等[12]在对3种铸造金属试样进行铣削、磨削和刮削时，也得出了加工表面分形维数与表面粗糙度为负相关的结论。Deepak 等[13]采用分形方法表征汽车气缸表面形貌，得到分形维数与气缸峰、心、谷区域的粗糙度等函数表面形貌参数呈负相关关系。

然而，其他学者认为它们成正比关系。Grzesik 等[14]利用统计、分形和基于神经网络的方法来评估多级加工过程的质量，发现当表面粗糙度下降时，分形维数也会下降，所以二者正相关。Wei 等[15]得到分形维数随表面粗糙度的增加而增加；同时还指出，这2个参数之间的相关性很弱。Bourebia [16]提出用分形维数代替传统的表面粗糙度来提高抛光表面的光洁度；在抛光铝合金表面的试验中，发现分形维数与表面粗糙度成正比。

为了解决上述争议并且揭示表面粗糙度和分形维数之间的关系，本研究将采用试验方法，取6种常见的机加工方法（车削、刨削、平面铣、端面铣、平面磨削和外圆磨削）获得的标准样块，利用表面测量和分析系统测试6组标本的表面轮廓，并通过结构函数法计算其分形维数。通过对比分析每个样块的分形维数和表面粗糙度大小，获得两者之间的关联规律。

1　分形理论在机加工表面的应用及其与表面粗糙度之间关系

根据文献[17]，机加工表面的粗糙度结构是自仿射的，具有分形特征。目前，Weierstrass-Mandebrot（W-M）函数经常用于模拟粗糙表面的轮廓，一个修正 W-M 函数[18]如下所述。

$$z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{(D-2)k} \sin(\lambda^k x) \tag{1}$$

其中：D 是分形维数（设 $1 < D < 2$）；$z(x)$ 是表面轮廓高度；λ 是特征尺度系数（设 $\lambda > 1$）。通过式(1)，可以得到不同分形维数模拟轮廓。图1给出了当 $\lambda = 1.5$ 时，$D = 1.2$、$D = 1.5$ 和 $D = 1.9$ 时的轮廓图。

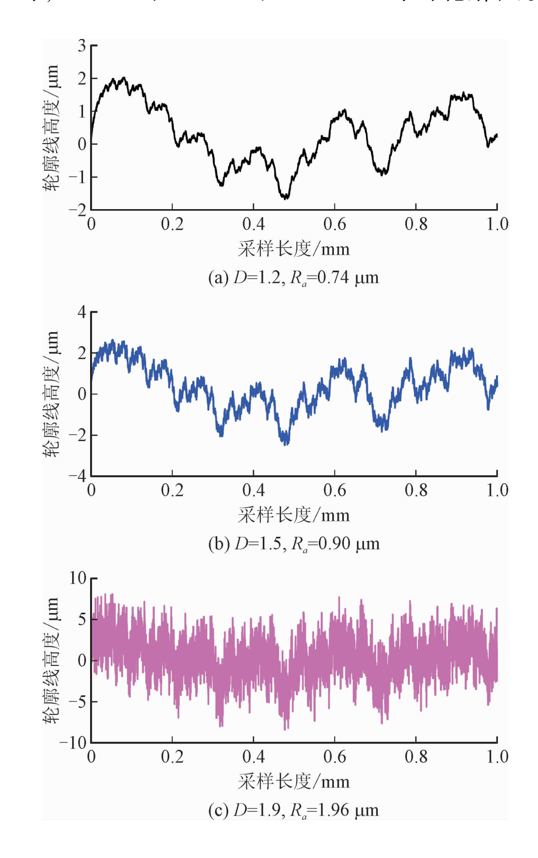


图1　基于 W-M 函数的分形轮廓模拟

Fig. 1　Profile simulation by W-M function

根据图1中的轮廓图，不难得到各自分形维数时的表面粗糙度值。此处表面粗糙度 R_a 的计算公式如下。

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y(i)| \tag{2}$$

其中 $y(i)$ 为轮廓上各点到中线的距离。由式(2)可得出上述3种情况对应的 R_a 分别为：$D = 1.2$ 时，$R_a = 0.74$ μm；$D = 1.5$ 时，$R_a = 0.90$ μm；$D = 1.9$ 时，$R_a = 1.96$ μm。从计算结果来看，分形维数与表面粗糙度之间呈反比关系，与目前大多数的研究结论一致[11-13]。但考虑到也存在 D 与 R_a 为负相关的不同结论，因此有必要开展机加工表面分形维数和表面粗糙度的测定工作——这也是下一节的研究内容。

2　维数 D 与表面粗糙度 R_a 之间关系的理论研究

在进行实验测定之前，为了说明分形维数与表面粗糙度无必然的正比或反比关系，下面将通过式(1)～(2)进行理论分析和证明。本研究将分别构造出 2 种情形：其一，表面形貌具有相同的分形维数 D，但表面粗糙度 R_a 不同；其二，表面粗糙度 R_a 相同，但分形维数 D 不同。

2.1　具有相同的 D 和不同 R_a 数值

由式(1)可知，分形维数主要反映轮廓是否具有相似性的规律，发现当在公式右侧乘以一个比例因子 ξ 后，其分形维数 D 的大小不变，但表面粗糙度却发生了变化，即相同的分形维数可对应不同的表面粗糙度。具体公式如下。

$$z^*(x) = \xi \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{(D-2)k} \sin(\lambda^k x) \tag{3}$$

例如，当设置 $\xi = 0.5, 2$，当 $D = 1.1$ 时，R_a 将减半或增加一倍。由表 1 可知，在给出了分形维数 $D = 1.1, 1.5, 1.9$ 的情况下，当调整系数 ξ 不同时，虽然分形维数相同，但表面粗糙度不相同。

表 1　相同 D 时，不同 R_a 数值

Tab. 1　R_a of different profiles with same D

D	R_a/μm	ξ
1.1	0.71	1.0
1.1	0.36	0.5
1.1	1.42	2.0
1.5	0.90	1.0
1.5	0.45	0.5
1.5	1.80	2.0
1.9	1.96	1.0
1.9	0.98	0.5
1.9	3.92	2.0

2.2　具有相同的 R_a 和不同 D 数值

同理，通过调整式(3)中系数 ξ 可得到相同的分形维数 D，却具有不同的表面粗糙度 R_a。表 2 给出了当分形维数不同时，仍可获得相同的表面粗糙度 $R_a = 0.90$ μm。图 2 给出了 $D = 1.1, 1.5, 1.9$ 时的轮廓，该 3 条曲线具有相同的 R_a 和不同的 D。

通过以上分析，可以得出结论，分形维数 D 和表面粗糙度 R_a 无必然的正比或者反比关系，具体针对不同加工方式形成的表面进行测量和分析。

表 2　相同 R_a 时，不同 D 数值

Tab. 2　Cases of same R_a but having different D

D	R_a/μm	ξ
1.1	0.90	0.793 1
1.2	0.90	0.828 2
1.3	0.90	0.872 0
1.4	0.90	0.928 1
1.5	0.90	1.000 0
1.6	0.90	1.104 7
1.7	0.90	1.265 8
1.8	0.90	1.544 9
1.9	0.90	2.185 0

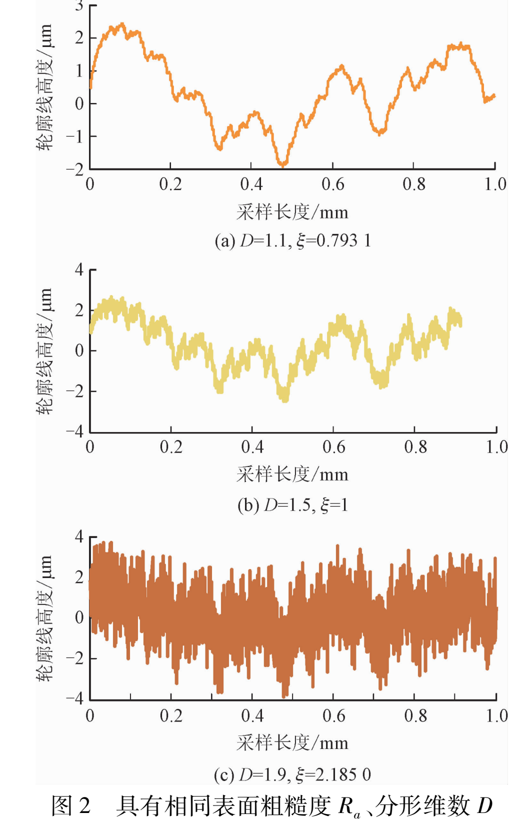


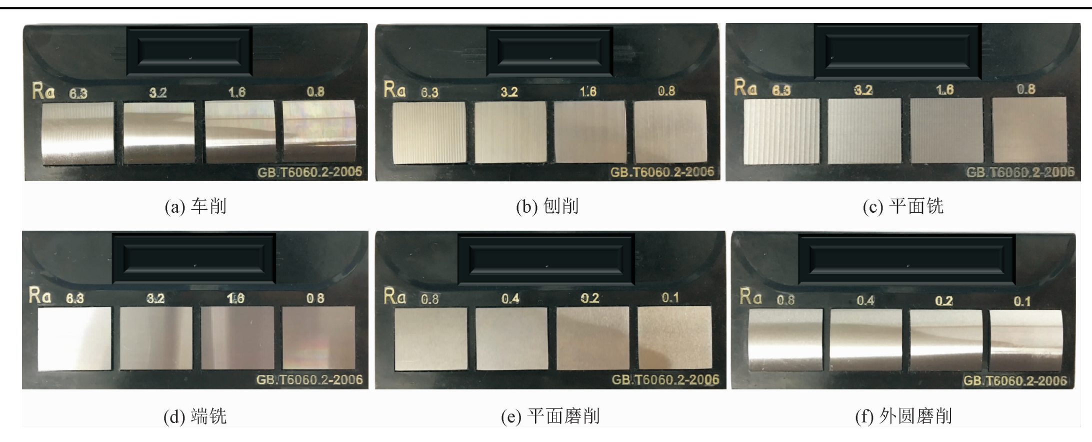
图 2　具有相同表面粗糙度 R_a、分形维数 D 不同($R_a = 0.90$ μm)

Fig. 2　Surfaces with same R_a but different D ($R_a = 0.90$ μm)

3　机加工表面的分形维数测定试验

3.1　试验方案

为了深入研究 D 和 R_a 二者之间的关系，准备了 6 组不同表面质量和制作方法的标准样块，如图 3 所示。其中：图 3(a)～(d)分别为车削、刨削、平面铣削和端铣削加工的样块，表面粗糙度 R_a 在 0.8～6.3 μm之间；图 3(e)～(f)分别由平面磨削和外圆磨削样件，表面粗糙度 R_a 在 0.1～0.8 μm 之间。



(a) 车削 (b) 刨削 (c) 平面铣

(d) 端铣 (e) 平面磨削 (f) 外圆磨削

图 3 不同加工方法、不同粗糙度的标准样块

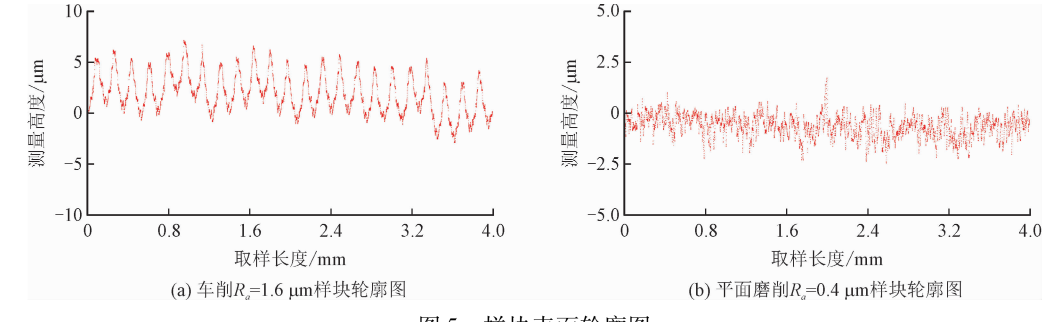
Fig. 3 Pictures of the specimen, where the value of R_a on the images are the nominal value and the actual value is subject to measurement



(a) 仪器外观 (b) 样件测量

图 4 Taylor-Hobson-120 and HT-SURF 10000 表面轮廓测试仪器

Fig. 4 Instrument of Taylor-Hobson-120 and HT-SURF 10000 for surface roughness measurement and profiles recording



(a) 车削R_a=1.6 μm样块轮廓图 (b) 平面磨削R_a=0.4 μm样块轮廓图

图 5 样块表面轮廓图

Fig. 5 Surface profile of the sample block

通过 Taylor-Hobson-120 仪器和 HT-SURF 10000 测量系统(图 4),可以得到所有样件的表面轮廓图。图 5 给出了车削 R_a = 1.6 μm 和平面磨削 R_a = 0.4 μm的表面轮廓采样图。

根据测量获得的表面轮廓点的数据,可以计算出表面的分形维数(D)。目前分形维数的计算方法有码杆法、箱计数法、变分法、功率谱法、结构函数法、均方根法和小波变换等[19]。考虑到结构函数法(SFM)具有精度好、计算效率高等优点,本研究选用该方法。在执行 SFM 时,将表面轮廓作为一个随时间的序列信号,如果信号具有分形特征,则其满足下式。

$$S(\tau) = [z(x+\tau) - z(x)]^2 = c\tau^{4-2d} \tag{4}$$

其中:$S(\tau)$为结构函数;$[z(x+\tau) - z(x)]^2$为差值的算术平均值;τ 是数据间隔的一个随机值。

当 τ 取值不同时,可以得到 $\lg S(\tau)$ 和 $\lg\tau$ 的双对数图(图 6)。分形维数可按下式计算。

$$D = 2 - \frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

其中 α 为对数-对数曲线上拟合直线的斜率。

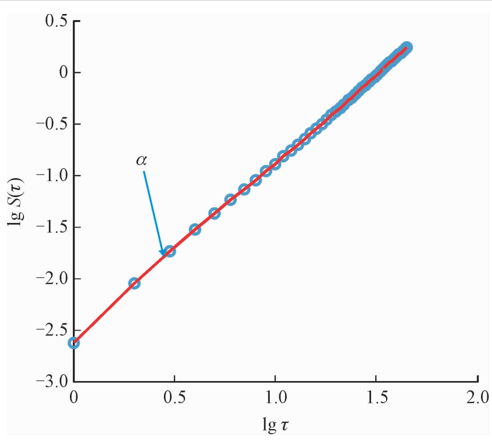


图 6　结构函数法(SFM)原理

Fig. 6　The principle of structure function method(SFM)

3.2　结果与讨论

对图 3 中所有试件进行测量后得到R_a，再利用式(3)～(4)即可得到不同样块相应的分形维数数值。表 3 给出了 6 种样件的测量结果，图 7 为表面粗糙度与分形维数的关系图。从图 7 可以看出，对于不同加工方法的样件，从总体趋势上看，随着R_a增加，D 趋于减小，这与大多数研究者的观点一致[10-13]。但对于不同加工方法的样块，其结论不尽相同，主要结论可分为以下 2 种情况。

1）用车床和刨床加工表面时(第 4 线、第 6 线)，D 与R_a成反比：即R_a下降时，D 增加；反之，R_a上升时，D 减小。

2）外磨、平磨、平铣、立铣(第 1 条线、第 2 条线、第 3 条线、第 5 条线)加工后的表面，D 先随R_a增大而增大；之后，D 又随R_a增大而减小；因此，在这 4 种加工曲面上，D 与R_a之间无固定的单调变化关联。

表 3　6 种样块的分形维数测量结果

Tab. 3　The measurement results of fractal dimension of six sample blocks

样块类型	R_a/μm	D	样块类型	R_a/μm	D	样块类型	R_a/μm	D
车削	0.8	1.457 9	平面铣	0.8	1.310 2	平面磨削	0.8	1.502 5
	1.6	1.292 4		1.6	1.338 9		1.6	1.548 8
	3.2	1.272 5		3.2	1.248 6		3.2	1.537 8
	6.3	1.152 8		6.3	1.223 4		6.3	1.486 0
刨削	0.8	1.270 0	端面铣	0.8	1.217 9	外圆磨削	0.8	1.538 6
	1.6	1.170 1		1.6	1.280 6		1.6	1.641 4
	3.2	1.123 0		3.2	1.234 3		3.2	1.567 6
	6.3	1.126 2		6.3	1.190 4		6.3	1.455 0

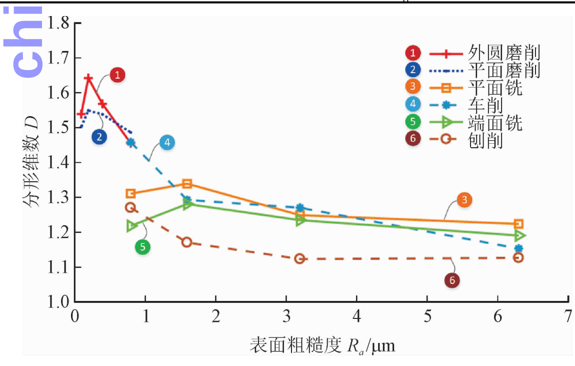


图 7　样块表面粗糙度与分形维数的关系图

Fig. 7　Result of fractal dimension related to roughness parameter (R_a)

4　结　论

本研究通过对 6 种不同加工方式、不同表面粗糙度的标准样件进行分形维数的测定试验，研究了分形维数与表面粗糙度参数之间的关联规律。研究结果显示：对于不同的加工方式，分形维数和表面粗糙度(R_a在 0.1～6.3μm 之间)没有固定的正比或反比关联规律，具体结论如下。

1)机加工表面虽然呈现出分形特性，但对于不同加工方式而言，表面粗糙度相同时，其分形维数可能不同；反之，分形维数相同时，其表面粗糙度可能不同。因此，针对不同的加工方式而言，分形维数与粗糙度之间无固定规律的定量关系。为了获得准确解，该 2 个参数的大小都需通过试验方法获得。

2)对于选定的 6 种机加工表面，在车削和刨削的表面中，分形维数与表面粗糙度呈反比关系，大致呈指数变化规律，这与目前的大多结论一致[20]；但对于平面铣、端面铣、平面磨削和外圆磨削，其分形维数和表面粗糙度之间虽然大体上为反比关系，但局部呈现正比关系，即该 4 种加工方式分形维数与

表面粗糙度之间为非单调关联。

参考文献:

[1] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York:WH Freeman,1982.

[2] MAJUMDAR A,BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of tribology,1991,113(1):1-11.

[3] MORAG Y,ETSION I. Resolving the contradiction of asperities plastic to elastic mode transition in current contact models of fractal rough surfaces[J]. Wear,2007,262(5/6):624-629.

[4] ZHENG W,ZHOU M,ZHOU L. Influence of process parameters on surface topography in ultrasonic vibration-assisted end grinding of SiCp/Al composites[J]. The international journal of advanced manufacturing technology,2017,91(8):2347-2358.

[5] NIU Z,JIAO L,CHEN S,et al. Surface quality evaluation in orthogonal turn-milling based on box-counting method for image fractal dimension estimation[J]. Nanomanufacturing and metrology,2018,1(2):125-130.

[6] 杨大勇,刘莹. 两种磨削表面形貌的分形表征[J]. 南昌大学学报(工科版),2007,(3):243-245.
YANG Dayong,LIU Ying. Fractal characterization of two kinds of grinding surface morphology[J]. Journal of Nanchang University (engineering),2007,(3):243-245(in Chinese).

[7] 王秋燕,梁志强,王西彬,等. 蓝宝石单晶精密磨削表面形貌的分形行为研究[J]. 机械工程学报,2015,51(19):174-181.
WANG Qiuyan,LIANG Zhiqiang,WANG Xibin,et al. Research on fractal behavior of surface topography in precision grinding of monocrystal sapphire[J]. Journal of mechanical engineering,2015,51(19):174-181(in Chinese).

[8] 李中华. 拼接模具铣削加工表面形貌预测与试验分析研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨理工大学,2018.

[9] 陆宝山,王雷刚,季业益,等. 基于分形粗糙表面的镀锌板接触与摩擦模型[J]. 塑性工程学报,2018,25(1):258-263.
LU Baoshan,WANG Leigang,JI Yeyi,et al. A contact and friction model of galvanized sheet based on fractal rough surface[J]. Journal of plasticity engineering,2018,25(1):258-263(in Chinese).

[10] ZHANG Y,LUO Y,WANG J F,et al. Research on the fractal of surface topography of grinding[J]. International journal of machine tools and manufacture,2001,41(13/14):2045-2049.

[11] ZHU H,GE S,HUANG X,et al. Experimental study on the characterization of worn surface topography with characteristic roughness parameter[J]. Wear,2003,255(6):309-314.

[12] JIANG S,ZHENG Y,ZHU H. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. Journal of tribology,2010,132(1):0114011-0114017.

[13] DEEPAK L K,RAMAMOORTHY B. Surface topography characterization of automotive cylinder liner surfaces using fractal methods[J]. Applied surface science,2013,280:332-342.

[14] GRZESIK W,BROL S. Hybrid approach to surface roughness evaluation in multistage machining processes[J]. Journal of materials processing technology,2003,134(2):265-272.

[15] WEI S,ZHAO H,JING J. Investigation on three-dimensional surface roughness evaluation of engineering ceramic for rotary ultrasonic grinding machining[J]. Applied surface science,2015,357:139-146.

[16] BOUREBIA M,LAOUAR L,HAMADACHE H,et al. Improvement of surface finish by ball burnishing:Approach by fractal dimension[J]. Surface engineering,2017,33(4):255-262.

[17] MAJUMDAR A,TIEN C. Fractal characterization and simulation of rough surfaces[J]. Wear,1990,136(2):313-327.

[18] FALCONER K. Fractal geometry:Mathematical foundations and applications[M]. Andrews:John Wiley & Sons,2004.

[19] EDGAR G. Measure,topology,and fractal geometry[M]. Columbus:Springer Science & Business Media,2007.

[20] 葛世荣. 摩擦学的分形[M]. 北京:机械工业出版社,2005.

(编辑 李坤璐)